14. Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

15. Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a.

16. Naći udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$ u tački $(a; a; \frac{\pi a}{4})$.

17. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ u tački $M(2; 2; 1)$.

9 Obvojna površ

Obvojna površ (obvojnica ili anvelopa) familije površi u prostoru je površ koja u svakoj svojoj tački dodiruje bar jednu površ familije.

Ako familija površi $f(x,y,z,a)=0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x,y,z)=0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x,y,z,a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b)=0$ ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu $F(x,y,z)=0$ koja se dobija elimeinacijom parametra a i b iz jednačina

$$f(x,y,z,a,b)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0$$

no tu jednačinu mogu zadovoljavati i druge tačke.

18. Naći obvojnu površ familije sferi

$$(x-a)^2+y^2+z^2-1=0.$$

19. Naći obvojnu površ familije sferi

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2.$$

gdje je a parametar.

20. Naći obvojnu površ ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}; 0; 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1.

21. Naći obvojnu površ familije elipsi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

pri uslovu $a+b+c=1$.

Naći obvojnu površ familije sferi

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 .$$

Rj.

Ako familija površi $f(x,y,z,a)=0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x,y,z)=0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x,y,z,a)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

$$f(x,y,z,a)=(x-a)^2+y^2+z^2-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(x-a)(-1) = -2x+2a$$

$$\begin{array}{c} (x-a)^2+y^2+z^2=1 \\ -2x+2a=0 \\ \hline (x-a)^2+y^2+z^2=1 \\ -2(x-a)=0 \\ \hline y^2+z^2=1 \end{array}$$

Jednačina obvojne površi je

$$y^2+z^2=1$$

kružni cilindar čije su izvodnice paralelne x osi.

\#) Nađi obvojnu površ familije sferi

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2$$

gdje je a parametar.

Rj.

$$f(x,y,z,a)=(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2-s^2a^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2p(x-pa)-2q(y-qa)-2r(z-ra)-2s^2a$$

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2 \qquad \dots(1)$$

$$p(x-pa)+q(y-qa)+r(z-ra)=-s^2a \qquad \dots(2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad px+qy+rz-p^2a-q^2a-r^2a=-s^2a$$

$$px+qy+rz=(p^2+q^2+r^2-s^2)a$$

odakle je $\quad a=\dfrac{px+qy+rz}{p^2+q^2+r^2-s^2}$

Ako uvedemo smjene $\quad px+qy+rz=\alpha$

$$p^2+q^2+r^2-s^2=\beta \quad (\beta\neq 0)$$

tada je $a=\dfrac{\alpha}{\beta}$, i zamjenjujući ovu vrijednost od a u (1) dobijamo jednačinu obvojne površi

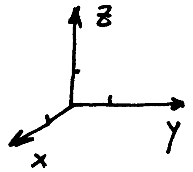
$$\left(x-p\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(y-q\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(z-r\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=s^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} \qquad /\cdot\beta^2$$

$$(\beta x-p\alpha)^2+(\beta y-q\alpha)^2+(\beta z-r\alpha)^2=s^2\alpha^2$$

#) Naći obvojnu površ ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}, 0, 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1.

Rj.

Prvo želimo pronaći familiju ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}, 0, 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1. Nijedna ravan iz te familije nije paralelna x-osi



$$A(x-\sqrt{2}) + By + Cz = 0$$

$\vec{n} = (A, B, C)$

Kako ni jedna ravan nije paralelna sa x-osom to $A \neq 0$, pa možemo uzeti da je vrijednost od $A = 1$.

$$x + By + Cz = \sqrt{2}$$

Udaljenost ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ od tačke (x_1, y_1, z_1) se računa po formuli $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = 1$

u našem slučaju rastojanje ravni od koordinatnog početka je uvijek jedan,

$$\Rightarrow \sqrt{1+B^2+C^2} = \sqrt{2}$$
$$1 + B^2 + C^2 = 2$$
$$B^2 = 1 - C^2$$
$$B = \pm\sqrt{1-C^2},$$
$$|C| < 1.$$

Ako vratimo dobijenu vrijednost za B u gornju jednakost dobijemo konačni oblik jednačine ravni koje zadovoljavaju uslov zadatka (sa parametrom C)

$$x \pm \sqrt{1-C^2}\, y + z = 0, \quad |C| < 1$$

Pronađimo obvojnu površ za dobijenu familiju ravni:

$$x \pm \sqrt{1-c^2}\, y + C z = \sqrt{2} \quad \ldots (*)$$

izvod po c-u:

$$\frac{-c}{\pm\sqrt{1-c^2}} y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -cy \pm \sqrt{1-c^2}\, z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{1-c^2}\, z = cy \quad \Leftrightarrow \quad (1-c^2) z^2 = c^2 y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 (y^2 + z^2) = z^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\pm z}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \wedge \quad c^2 = \frac{z^2}{y^2+z^2}$$

$$\sqrt{1-c^2} = \sqrt{\frac{y^2+z^2-z^2}{y^2+z^2}} = \frac{\pm y}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \ldots (**)$$

Iz (*) i (**) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$x \pm \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot y \pm \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot z = \sqrt{2}$$

$$x \pm \frac{y^2+z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-\sqrt{2})^2 = y^2 + z^2$$

ovo je jednačina konusa čije je teme u tački $(\sqrt{2}, 0, 0)$ a osa simetrije joj je x-osa.

Naći obvojnu površ familije elipsi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{pri uslovu } a+b+c=1.$$

Rj.

Pri datom uslovu familija elipsi se pretvara u

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \ldots(*)$$

Parcijalni izvodi od $(*)$ po b i c su:

po b: $$(-2)x^2(1-b-c)^{-3}\cdot(-1)+y^2\cdot(-2)b^{-3}=0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3}-\frac{y^2}{b^3}=0 \qquad \ldots(**)$$

po c: $$x^2(-2)(1-b-c)^{-3}(-1)+z^2(-2)c^{-3}=0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3}-\frac{z^2}{c^3}=0 \qquad \ldots(***)$$

Eliminisanjem parametara b i c iz $(*)$, $(**)$ i $(***)$ dobićemo jednačinu tražene obvojne površi.

$$(**) \text{ i } (***) \Rightarrow \frac{y^2}{b^3}=\frac{z^2}{c^3} \Rightarrow \frac{c^3}{b^3}=\frac{z^2}{y^2} \Rightarrow c=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b$$

Ako uvrstimo dobijeno c u $(***)$ imamo da je

$$\frac{x^2}{\left(1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b\right)^3}=\frac{z^2}{c^3}=\frac{y^2}{b^3} \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b}{b}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}+1+\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}} \qquad \ldots(\square)$$

Kako je $c=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} b \overset{(\square)}{\Longrightarrow}$ $$c=\frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots(\square\square)$$

Ako uvrstimo vrijednosti od b i c iz $(\square)$ i $(\square\square)$ u $(*)$ dobićemo jednačine obvojne površi

$$\boxed{1-b-c=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\frac{x^2}{\frac{x^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{2/3})^2}}+\frac{y^2}{\frac{y^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{2/3}+z^{2/3})^2}}+\frac{z^2}{\frac{z^{4/3}}{(x^{\frac{2}{3}}+y^{2/3}+z^{2/3})^2}}=1$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{2/3}=1$$

tražena obvojna površ

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*